ZVEZA MED MASO IN RADIJEM BELE PRITLIKAVKE

PROJEKT IZ ASTOFIZIKE

Rok Zaplotnik

Mentor: prof. Andrej Čadež
Ljubljana, 29.9.2005

Kazalo

1 Naloga

Kakšna je zveza med maso in radijem bele pritlikavke v oviru Newtonove gravitacije, vendar z upoštevanjem enačbe stanja za degeneriran elektronski plin, ki lahko postane relativistično degeneriran.

2 Uvod - Politropni model

Obstaja nekaj enostavnih modelov s katerim poskušamo opisati zvezde. Eden izmed njih je politropni model. Z njim lahko opišemo kar nekaj zvezd. Ta model je za nekatere zvezde dober, za druge slabši in nam pove, da tlak zvezde ni več odvisen od temperature kot pri idealnem plinu, ampak le od gostote. Enačba stanja je torej

$$P = K\rho^{\gamma}, \tag{1}$$

kjer je K politropna konstanta in $\gamma = c_p/c_v$.
Uvedemo novi spremenljivki ξ in θ kjer je prva povezana z radijem zvezde $r = \alpha\xi$, α je konstanta, druga pa z gostoto $\rho = \rho_c\theta^n$, kjer je $\rho_c = \rho(r = 0)$ centralna gostota. Sedaj je enačba za tlak z novo spremenljivko $P = P_c\theta^{n+1}$. Zvezdo opišemo z Lane-Emdenovo enačbo, ki jo izpeljemo iz enačbe za hidrostatično ravnovesje, kontinuitetne enačbe za maso in enačbe stanja, in se glasi

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n, \tag{2}$$

kjer je n politropni indeks $n = \frac{1}{\gamma-1}$. Rešitve te enačbe nam dajo zvezo $\theta(\xi)$, s pomočjo katere lahko dobimo zvezo $\rho(r)$ in posledično tudi $M(R)$, kar pa je tudi naš namen.

3 Bele pritlikavke

Zvezde ki so manj masivne od štirih mas Sonca verjetno zaključijo svojo evolucijo kot bele pritlikavke. Ker se zvezdi zaradi izgube mase masa zmanjša pod $1.4M_\odot$ še preden se vžge C^{12}, je He zadnje jedarsko gorivo preden degeneracija zaustavi kolaps. Sedaj je tlak degeneriranega plina edini tlak, ki uspe podpirati zvezdo. Ker so se te zvezde razvile onkraj helijevega gorenja, je jedro predvsem iz C^{12} ali iz C^{12} in O^{16}, ovojnica iz He^4, zunanji sloj pa je lahko tudi iz vodika.
Degenerirani elektroni so zaslužni za skoraj ves tlak, njihova toplotna prevodnost pa je najbolj učinkovit transport energije v notranjosti. Za skoraj

vso maso so zaslužni ioni, ki pa vsebujejo tudi skoraj vso toplotno energijo, ki jo zvezda lahko izseva.
Snov v beli pritlikavki je popolnoma ionizirana tudi, ko se zvezda ohladi na ničelno temperaturo. Vir ionizacije je ekstremni tlak, ki stisne atome na manjši volumen kot je volumen atoma na zemlji. Elektroni bodo popolnoma ionizirani, če velja neenačba [2]:

$$\rho > \frac{3}{4\pi}\frac{AZm_p}{a_0^3} = 3.2AZ\ g/cm^3. \tag{3}$$

Ker pa ima večina belih pritlikavk gostote večje od $10^4 g/cm^3$, je to skoraj vedno izpolnjeno.
Struktura bele pritlikavke je določena s hidrostatičnim ravnovesjem, z enačbo stanja in s sestavo. Celotni tlak je vsota tlaka ionov P_i in tlaka elektronov P_e, ker pa je razmerje P_i/P_e zelo majhno, le nekaj procentov, bomo privzeli, da je P_e kar celotni tlak.

4 Degeneriran plin

4.1 Popolnoma degeneriran plin

Stanje v katerem imajo vsi elektroni najnižjo energijo ne da bi kršili Paulijev princip je tako, da so vse fazne celice do neke gibalne količine p_F zasedene z dvema elektronoma, vse ostale fazne celice nad p_F pa so prazne:

$$f(p) = \frac{8\pi p^2}{h^3} \qquad \text{za} \qquad p \le p_F,$$

$$f(p) = 0 \qquad \text{za} \qquad p > p_F. \tag{4}$$

Celotno število elektronov v volumnu dV je dano z enačbo

$$n_e dV = dV \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2 dp}{h^3} = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 dV \tag{5}$$

Če je gostota elektronov znana, nam enačba (5) da Fermijevo gibalno količino $p_F \sim n_e^{1/3}$. Če so elektroni nerelativistični, potem je $E_F = p_F^2/2m_e \sim n_e^{2/3}$ Fermijeva energija in kljub temu, da je temperatura našega elektronskega plina nič, imajo elektroni končne energije do E_F. Vendar ne obstajajo elektroni z višjo energijo. Če pa je gostota elektronov dovolj velika, pa po enačbi (5) p_F lahko postane tako velik, da hitrosti najhitrejših elektronov lahko postanejo primerljive svetlobni hitrosti c. V tem primeru moramo uporabiti posebno relativnost.

Za enačbo stanja rabimo tlak, ki ga lahko dobimo s pomočjo virialnega teorema ali pa z računanjem fluksa gibalne količine skozi enoto površine na enoto časa. Uporabil bom slednji način. Vsak elektron ima absolutno vrednost gibalne količine p v smeri $\mathbf{s}$. Celotni fluks gibalne količine v smeri $\mathbf{n}$ dobimo z integracijo po vseh smereh $\mathbf{s}$ na polobli in po vseh absolutnih vrednostih gibalnih količin p [1]. Tlak elektronov P_e je potem

$$P_e = \int_{2\pi} \int_0^{\infty} f(p) v(p) p \; cos^2\theta \; dp d\Omega_s/(4\pi) = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} p^3 v(p) dp, \qquad (6)$$

kjer smo $f(p)$ nadomestili z (4) in dobili vrednost $4\pi/3$ z integracijo $cos^2\Omega$ po polobli. Ker je plin elektronov izotropen, je f sferično simetričen v faznem prostoru.

$v(p)$ dobimo s pomočjo posebne relativnosti

$$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad , \qquad (7)$$

to vstavimo v integral (6) in dobimo

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{8\pi c}{3h^3} \int_0^{p_F} p^3 \frac{p/(m_e c)}{[1 + p^2/(m_e^2 c^2)]^{1/2}} dp \\ &= \frac{8\pi c^5 m_e^4}{3h^3} \int_0^x \frac{\xi^4 d\xi}{(1+\xi^2)^{1/2}} dp \quad , \end{aligned} \qquad (8)$$

kjer smo uvedli nove spremenljivke:

$$\xi = p/(m_e c) \quad , \quad x = p_F/(m_e c) \quad . \qquad (9)$$

Izračunamo integral

$$\int_0^x \frac{\xi^4 d\xi}{(1+\xi^2)^{1/2}} dp = \frac{1}{8}\Big[x(2x^2 - 3)(1 + x^2)^{1/2} + 3 sinh^{-1} x\Big]$$

in dobimo tlak

$$P_e = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} f(x) \quad , \qquad (10)$$

kjer smo z $f(x)$ označili

$$\begin{aligned} f(x) = x(2x^2-3)(1+x^2)^{1/2} + 3 sinh^{-1} x &\equiv x(2x^2 - 3)(x^2+1)^{1/2} \\ &+ 3 ln\Big[x + (1+x^2)^{1/2}\Big] \quad . \end{aligned} \qquad (11)$$

Napišemo enačbo (5) v malo drugačni obliki

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_u} = \frac{8\pi m_e^3 c^3}{3h^3} x^3 \quad , \qquad (12)$$

kjer je $\mu_e = A/Z$, A je masno število, Z je vrstno število in m_u atomska enota mase. Enačbe (10-12) definirajo funkcijo $P_e(n_e)$.

4.2 Limitna primera

Parameter x, kot je definiran v (9), je merilo za pomembnost relativističnih efektov za elektrone z največjo gibalno količino. S pomočjo enačbe (7) lahko zapišemo x v obliki

$$x = \frac{p_F}{m_e c} = \frac{v_F/c}{(1 - v_F^2/c^2)^{1/2}} \quad \text{ali} \quad \frac{v_F^2}{c^2} = \frac{x^2}{1 + x^2} \quad , \tag{13}$$

kjer je v_F hitrost elektronov z gibalno količino $p = p_F$.

4.2.1 Nerelativistični primer

Če je $x \ll 1$, potem je $v_F/c \ll 1$. To nam pove, da so vsi elektroni veliko počasnejši kot svetlobna hitrost. Zaradi tega lahko zanemarimo relativistične efekte. Za funkcijo $f(x)$, kot je definirana v (11), lahko napišemo asimptotsko obnašanje:

$$x \to 0 : f(x) \to \frac{8}{5} x^5 \quad . \tag{14}$$

Enačbo (10) lahko sedaj zapišemo kot

$$P_e = \frac{8\pi m_e^4 c^5}{15 h^3} x^5 \quad , \tag{15}$$

in če upoštevamo še enačbo (12), potem dobimo enačbo stanja za popolnoma degeneriran nerelativističen elektronski plin:

$$\begin{aligned} P_e = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} n_e^{5/3} &= \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e m_u^{5/3}} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3} \\ &= 1.0036 \times 10^7 m^4 kg^{-2/3} s^{-2} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3} \quad . \end{aligned} \tag{16}$$

4.2.2 Relativistični primer

Če pa je $x \gg 1$, potem je v_F/c zelo blizu ena. Večji je x, več elektronov s hitrostjo blizu v_F postane relativističnih, za zelo velike vrednosti x pa so skoraj vsi elektroni relativistični. Asimptotsko obnašanje funkcije $f(x)$ je

$$x \to \infty : f(x) \to 2x^4 \quad . \tag{17}$$

Enačbo (10) sedaj zapišemo kot

$$P_e = \frac{2\pi m_e^4 c^5}{3 h^3} x^4 \quad , \tag{18}$$

če upoštevamo še (12), dobimo enačbo stanja za ekstremno relativističen primer popolnoma degeneriranega elektronskega plina:

$$P_e = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8} n_e^{4/3} = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8m_u^{4/3}} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}$$

$$= 1.2435 \times 10^{10} m^3 kg^{-1/3} s^{-2} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3} \quad . \tag{19}$$

5 M-R relacija

M-R relacijo bomo izračunali za politropni model, saj smo v prejšnjem oddelku videli, da se popolnoma degeneriran elektronski plin za limitna primera dobro opiše s tem modelom.
Maso krogle izračunamo z integralom

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr \quad . \tag{20}$$

Uvedemo brezdimenzijski spremenljivki ξ in θ,

$$\rho = \rho_c \theta^n, \qquad r = \alpha\xi \quad , \tag{21}$$

kjer je

$$\alpha = \left[\frac{n+1}{4\pi G} K\right]^{1/2} \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \quad , \tag{22}$$

jih vstavimo v integral (20) in dobimo

$$\alpha^3 \rho_c 4\pi \int_0^{\xi_1} \xi^2 \theta^n d\xi =$$

tu smo definirali še ξ_1, kot $R = \alpha\xi_1$. Za izračun tega integrala si pomagamo z Lane-Emdenovo enačbo (2), saj je

$$\xi^2 \theta^n = -\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right),$$

ravno to pa potrebujemo.

$$= 4\pi\alpha^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \left(-\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)\right) d\xi =$$

$$= 4\pi\alpha^3\rho_c\left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)\Big|_0^{\xi_1} = 4\pi\alpha^3\rho_c\left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$$

Sedaj upoštevamo še (22) in dobimo enačbi za maso in radij

$$M = 4\pi\left[\frac{n+1}{4\pi G}K\right]^{3/2}\rho_c^{\frac{3-n}{2n}}\left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1} \quad ,$$

$$R = \left[\frac{n+1}{4\pi G}K\right]^{1/2}\rho_c^{\frac{1-n}{2n}}\xi_1 \quad . \tag{23}$$

Iz enačbe za radij izrazimo ρ_c, damo na pravo potenco, vstavimo v enačbo za maso in dobimo enačbo $M(R)$ za politropni indeks n.

$$\rho_c = \left[\frac{n+1}{4\pi G}K\right]^{\frac{n}{n-1}}\xi_1^{\frac{2n}{n-1}}R^{\frac{2n}{1-n}} \quad \Rightarrow \quad \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} = \left[\frac{n+1}{4\pi G}K\right]^{\frac{3-n}{2n-2}}\xi_1^{\frac{3-n}{n-1}}R^{\frac{3-n}{1-n}}$$

$$\underline{\underline{M = 4\pi\left[\frac{n+1}{4\pi G}K\right]^{\frac{n}{n-1}}\xi_1^{\frac{3-n}{n-1}}\left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}R^{\frac{3-n}{1-n}}}} \quad . \tag{24}$$

5.1 M-R relacija za nerelativističen in relativističen degeneriran elektronski plin

5.1.1 Nerelativistični primer

V lahkih belih pritlikavkah, s centralno gostoto manjšo od $10^6 g/cm^3$, je gibanje degeneriranih elektronov nerelativistično [2] in tlak elektronov lahko aproksimiramo s politropom indeksa $n = 1.5$, kot nam prikazuje enačba (16). Iz te enačbe dobimo K in n, $P_e = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$. Vrednosti ξ_1 in $\left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$ za različne n-je se lahko numerično oceni in jih dobimo v tabeli 4.2. v knjigi *Astrophysics I Stars* [2].

V enačbo (24) vnesemo politropni indeks $n = 1.5$ in dobimo presenetljiv rezultat, da je masa M obratno sorazmerna z volumnom $V \sim R^3$:

$$M = 4\pi\left[\frac{2.5}{4\pi G}K\right]^3\xi_1^3\left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}R^{-3} \quad . \tag{25}$$

Vnesemo še vrednosti

$$K = 1.0036\times 10^7\frac{1}{\mu_e^{5/3}}m^4kg^{-2/3}s^{-2},$$

$$\xi_1 = 3.65375, \qquad \left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1} = 2.71406$$

in dobimo končen rezultat za masa-radij relacijo za belo pritlikavko, nerelativistični primer:

$$\underline{M = 6.67 \times 10^{-5} M_\odot \left(\frac{R_\odot^3}{R^3}\right)\frac{1}{\mu_e^5}} \quad , \tag{26}$$

kjer je $R_\odot$ radij Sonca in $M_\odot$ masa Sonca.
Ta rezultat nam pove, da je radij manjši, če je masa večja. Model se bo krčil, ko se bo masa povečevala in bi moral končati kot točka z neskončno maso. Vendar naša privzeta enačba stanja kmalu nebi bila več veljavna, saj vidimo v enačbi (23), da se centralna gostota veča s kvadratom mase $\rho_c \sim M^2$. Z večanjem gostote pa elektroni postanejo relativistični in enačbo stanja (16) moramo zamenjati z (19). To pa pomeni prehod iz politropa z indeksom $n = 1.5$ v poltrop $n = 3$ in seveda sprememba njune politropne konstante K.

5.1.2 Relativistični primer

V bolj masivnih belih pritlikavkah, kjer centralna gostota presega $10^6 g/cm^3$, so povprečne energije elektronov relativistične [2] in je lahko tlak elektronov približno opisan z politropom indeksa $n = 3$, kot je razvidno iz enačbe (19).

$$n = 3, \qquad K = 1.24349 \times 10^{10}\frac{1}{\mu_e^{4/3}} m^3 kg^{-1/3} s^{-2},$$

$$\xi_1 = 6.89685, \qquad \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1} = 2.01824 \quad .$$

Te vrednosti vnesemo v enačbo (24) in dobimo

$$M = 4\pi \left[\frac{K}{\pi G}\right]^{\frac{3}{2}} \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1} = \frac{5.8236}{\mu_e^2} M_\odot = M_{Ch} \quad . \tag{27}$$

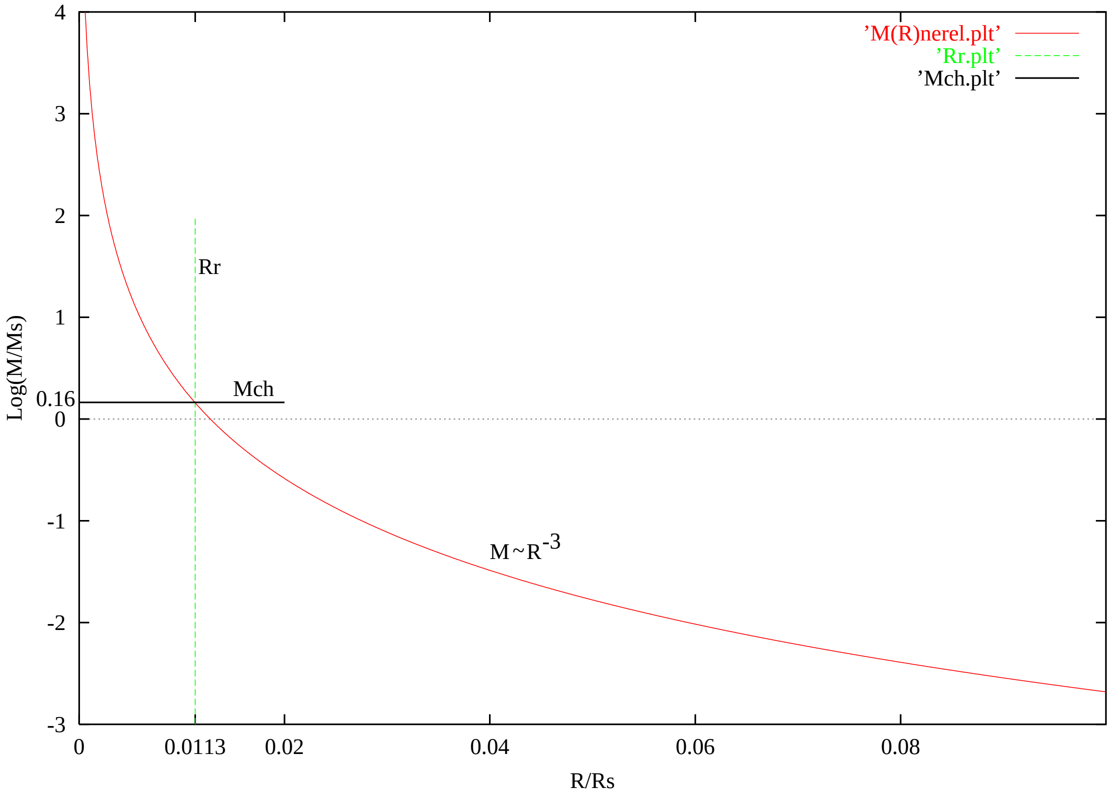
Ta masa se imenuje Chandrasekharjeva masa. Opazimo, da ni odvisna od gostote ampak le od sestave. Za snov, ki se je razvila onkraj vodikovega gorenja, lahko vzamemo $\mu_e \simeq 2$, in (27) se skrči na

$$\underline{M_{Ch} = 1.456 M_\odot} \quad . \tag{28}$$

6 Zaključek

Ko je Chandrasekhar skonstruiral prvi model bele pritlikavke, je združil dva območja: relativistično politropno jedro z $n = 3$ obdano z nerelativistično politropno ovojnico z $n = 1.5$.

Oglejmo si, kako se ta model spreminja z večajočo se maso M. Pri majhni M je cel model nerelativističen. Relativistično jedro se pojavi, ko je $\rho_c \gtrsim 10^6 g/cm^3$ in postopoma začne obsegati večje dele modela, ker se ρ_c veča. [1] Kot vidimo iz (27) je edina možna masa za relativistično degenerirane politrope Chandrasekharjeva masa. Tako lahko pričakujemo, da se bo naš model skonstruiran iz $n = 1.5$ ovojnice ter $n = 3$ jedra konča s kritično maso $M = M_{Ch}$.
Na Sliki 1 vidimo M-R relacijo za nerelativističen in relativističen degeneriran elektronski plin in njuno presečišče pri radiju R_r. S tem radijem lahko



Slika 1: *M-R relacija za limitna primera*

ocenimo gostoto, pri kateri začne prevladovati relativistična limita:

$$\rho = \frac{M_{Ch}}{4\pi R_r^3/3} \approx 1 \cdot 10^9 \frac{kg}{m^3}$$

Vidimo, da se območje okoli te gostote ne da dobro opisati s politropoma $n = 3$ ali $n = 1.5$, zato moramo za boljši opis bele pritlikavke uporabiti Chandrasekharjevo teorijo.

6.1 Chandrasekharjeva teorija

Za boljši opis strukture bele pritlikavke moramo uporabiti splošno enačbo stanja za popolnoma degeneriran plin:

$$P = C_1 f(x) \quad , \quad \rho = C_2 x^3 \quad ; \quad x = p_F/m_e c \quad , \tag{29}$$

kjer po enačbah (10,12) definiramo konstanti C_1 in C_2, enačba (11) pa nam da $f(x)$.
Začnemo s Poissonovo enačbo, uvedemo brezdimenzijski spremenljivki ζ in φ:

$$\zeta := \frac{r}{\alpha} \quad , \quad \alpha = \sqrt{\frac{2C_1}{\pi G}} \frac{1}{C_2 z_c} \quad , \tag{30}$$

$$\varphi := \frac{z}{z_c} \quad , \quad z^2 := x^2 + 1 \quad , \tag{31}$$

kjer je z_c centralna vrednost z-ja, in dobimo Chandrasekharjevo diferencialno enačbo za strukturo bele pritlikavke [1]:

$$\frac{1}{\zeta^2} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta^2 \frac{d\varphi}{d\zeta} \right) = - \left(\varphi^2 - \frac{1}{z_c^2} \right)^{3/2} \quad . \tag{32}$$

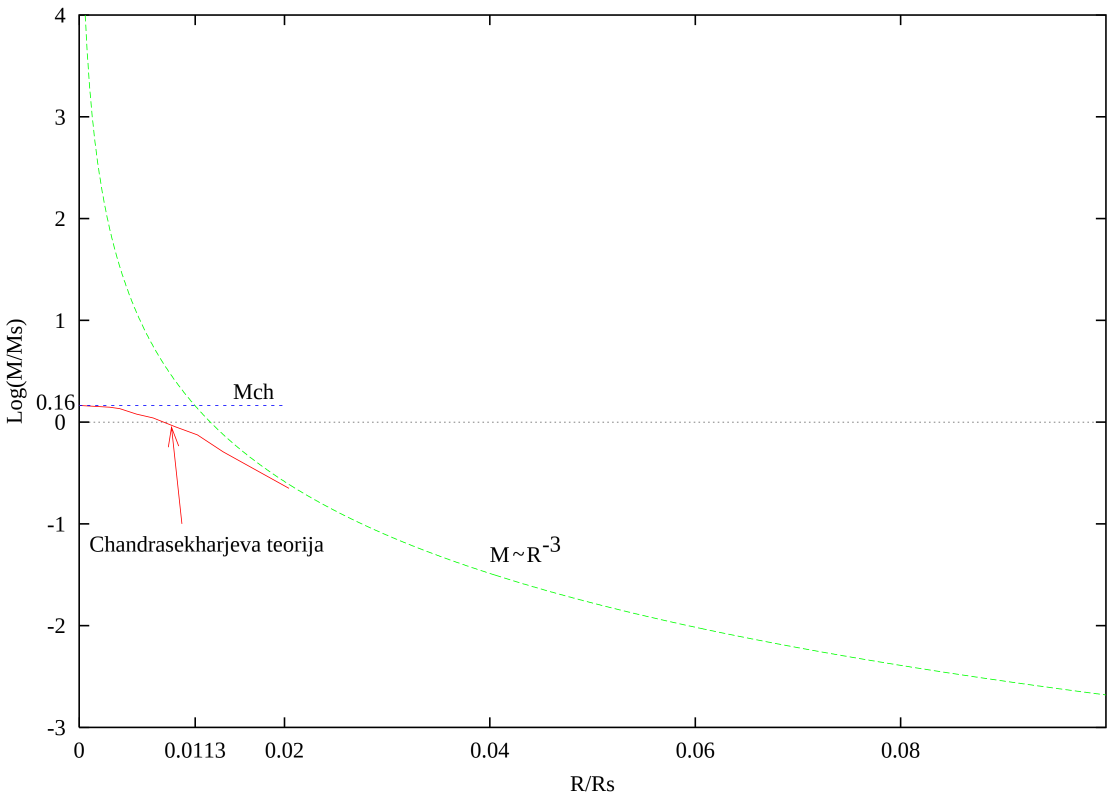
Opazimo podobnost z Lane-Emdenovo enačbo za politrope. Prav to pa tudi postane, če gremo v limiti $z \to \infty$ $(x \to \infty)$ se spremeni v Emdenovo enačbo za politropni indeks $n = 3$, $z \to 1$ $(x \to 0)$ pa za politropni indeks $n = 3/2$.
Na površju je $\zeta = \zeta_1$, kjer ρ postane nič. Radij bele pritlikavke je potem

$$R = \alpha \zeta_1 = \sqrt{\frac{2C_1}{\pi G}} \frac{1}{C_2 z_c} \zeta_1 \quad . \tag{33}$$

Maso pa izračunamo podobno kot pri politropih, le da si tokrat pomagamo s Chandrasekharjevo diferencialno enačbo namesto z Lane-Emdenovo. Masa bele pritlikavke je [1]

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) dr \\ &= \frac{4\pi}{C_2^2} \left(\frac{2C_1}{\pi G} \right)^{3/2} \left(- \zeta^2 \frac{d\varphi}{d\zeta} \right)_1 \quad . \end{aligned} \tag{34}$$

Vrednosti ζ_1 in $\left(- \zeta^2 \frac{d\varphi}{d\zeta} \right)_1$ se da numerično izračunati za različne vrednosti z_c-ja, od ∞ do 1 to pomeni od $x_c = \infty$ popolnoma relativistično do $x_c = 0$ nerelativistično, in dobimo funkcijo $M(R)$, ki je prikazana na Sliki 2. Te vrednosti so tudi že izračunane v tabeli 35.1 v knjigi *Stellar Structure and Evolution* [1].



Slika 2: *Zveza med maso in radijem bele pritlikavke*

Presenetljivo je, da je limitna masa ne le končna, ampak tudi tako majhna, da jo večina zvezd preseže. Ampak v njihovi enačbi stanja ne prevladuje degeneriran plin elektronov in zato Chandrasekharjeva limitna masa za njih nima pomena. Ta limita velja le za bele pritlikavke, to potrjuje tudi dejstvo, da do današnjega dne ni bila odkrita še nobena bela pritlikavka, ki bi presegala Chandrasekharjevo maso $M_{Ch} = 1.456 M_{\odot}$.

Literatura

[1] R. Kippenhan, A. Weigert: *Stellar Structure and Evolution*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1990

[2] R. Bowers, T. Deeming: *Astrophysics I Stars*, Jones and Bartlett Publishers, Massachusetts 1984