UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Domača naloga pri predmetu Teorija gravitacije

Plimska sila v splošni teoriji relativnosti

Martin Draksler
Vpisna številka: 28010361

Ljubljana, 2010

Kazalo

1 Naloga

Izpelji enačbo za plimsko silo v splošni relativnosti, ki je znana pod imenom „geodesic deviation equation“ in izračunaj tenzor lokalne plime v sistemu, ki prosto pada v polju Schwarzschildove črne luknje.

2 Izpeljava enačbe za plimsko silo

V nalogi bomo izpeljali enačbo za izračun plimske sile, jo povezali s Riemannovim tenzorjem ukrivljenosti in na koncu enačbo implementirali na primeru. Zapisali bomo vektor pospeška pri radialnem prostem padu iz neskončnosti v polju Schwarzschildove črne luknje.

Plimsko silo izračunamo tako, da opazujemo spreminjanje relativnega pospeška dveh delcev, ki prosto padata. A preden lahko to storimo, moramo vpeljati koncept odvajanja vzdolž krivulje („differentiation along the curve“). Zamislimo si krivuljo, po možnosti goedetko, ni pa nujno. Premik vzdolž krivulje lahko podamo z ustreznim premikom v dolžini ali z lastnim časom τ. Naj bo krivulja obdana z vektorskim poljem A^μ. Če hočemo vedeti, kako se A^μ spremeni vzdolž krivulje moramo izračunati

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} \equiv A^\mu_{;\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}A^\alpha\frac{dx^\beta}{d\tau}, \tag{1}$$

kar je poimenovano odvod vzdolž krivulje.

Za izračun plimske sile potrebujemo drugi odvod, ki ga dobimo tako, da enačbo (1) še enkrat odvajamo po $D\tau$.

$$\begin{aligned}\frac{D^2A^\mu}{D\tau^2} &= \frac{D}{D\tau}\left(\frac{DA^\mu}{D\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{DA^\mu}{D\tau}\right) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{DA^\alpha}{D\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\\ &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}A^\alpha\frac{dx^\beta}{d\tau}\right) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{DA^\alpha}{D\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\\ &= \frac{d^2A^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}A^\alpha\frac{dx^\beta}{d\tau} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dA^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\\ &\qquad + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}A^\alpha\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\sigma\lambda}A^\sigma\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}.\end{aligned} \tag{2}$$

V zadnji enačbi nastopa člen $dx^\beta/d\tau$, ki ga dobimo iz enačbe geodetke (enačba gibanja delca v gravitacijskem polju):

$$\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} = -\Gamma^\beta_{\sigma\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}.$$

Sedaj pa lahko začnemo našo izpeljavo relativnega pospeška dveh delcev, ki se gibljeta po dveh sosednjih geodetkah. Če ob nekem času τ, ki je enak za oba, koordinate delcev podamo z $x^\mu(\tau)$ in $x^\mu(\tau)+\xi^\mu(\tau)$, potem velja:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{d^2\left(x^\mu+\xi^\mu\right)}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x^\mu+\xi^\mu)\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}+\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^\beta}{d\tau}+\frac{d\xi^\beta}{d\tau}\right)=0 \tag{4}$$

Na tem mestu predpostavimo, da sta ξ^μ in $d\xi^\mu/d\tau$ majhna, kar pomeni, da sta delca blizu drug drugega in tako tudi ostaneta. Tako lahko Christoffelove simbole aproksimiramo s Taylorjevim razvojem:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x+\xi)\approx\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x)+\Gamma^\mu_{\alpha\beta,\sigma}\xi^\sigma, \tag{5}$$

pri čemer uporabimo razvoj le do prvega reda ξ. Nato od enačbe (4) odštejemo enačbo (3) in dobimo

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x^\mu+\xi^\mu)\left(\frac{dx^\alpha}{d\tau}+\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\right)\left(\frac{dx^\beta}{d\tau}+\frac{d\xi^\beta}{d\tau}\right)-\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0. \tag{6}$$

Sedaj nekoliko razpišimo drugi člen:

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x^\mu+\xi^\mu)\left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\frac{d\xi^\beta}{d\tau}+2\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{d\xi^\beta}{d\tau}+\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right)-\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$$

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x^\mu+\xi^\mu)\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\frac{d\xi^\beta}{d\tau}+2\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x^\mu+\xi^\mu)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{d\xi^\beta}{d\tau}+\left(\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x^\mu+\xi^\mu)-\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\right)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0 \tag{7}$$

Z upoštevanjem enačbe (5) in upoštevanjem le prvega reda ξ, člen $\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\frac{d\xi^\beta}{d\tau}$ odpade. Tako dobimo:

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2}+2\left(\Gamma^\mu_{\alpha\beta}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta,\sigma}\xi^\sigma\right)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{d\xi^\beta}{d\tau}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta,\sigma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\sigma=0$$

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2}+2\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{d\xi^\beta}{d\tau}+2\Gamma^\mu_{\alpha\beta,\sigma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{d\xi^\beta}{d\tau}\xi^\sigma+\Gamma^\mu_{\alpha\beta;\sigma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\sigma=0 \tag{8}$$

Tretji člen v enačbi (8) je tudi drugega reda, in ga, kot je že bilo rečeno zanemarimo.

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2}=-\Gamma^\mu_{\alpha\beta;\sigma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\sigma-2\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \tag{9}$$

Sedaj enačbo (9) vstavimo v enačbo (2) in dobimo

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2}=\left(-\Gamma^\mu_{\alpha\beta;\sigma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\sigma-2\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right)+\Gamma^\mu_{\alpha\beta,\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\alpha$$
$$+2\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}-\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\sigma\lambda}\xi^\alpha\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\alpha_{\sigma\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\sigma. \tag{10}$$

Drugi in peti člen na desni strani enačbe se odštejeta in tako dobimo

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2}=\Gamma^\mu_{\alpha\beta,\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\alpha-\Gamma^\mu_{\alpha\beta,\sigma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\sigma$$
$$-\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\Gamma^\beta_{\sigma\lambda}\xi^\alpha\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau}+\Gamma^\mu_{\beta\alpha}\Gamma^\alpha_{\sigma\lambda}\frac{dx^\lambda}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\sigma. \tag{11}$$

S preureditvijo indeksov dobimo

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} = \Gamma^\mu_{\beta\sigma,\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\sigma - \Gamma^\mu_{\beta\alpha,\sigma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\sigma$$
$$-\Gamma^\lambda_{\beta\alpha}\Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\sigma + \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\sigma. \tag{12}$$

Sedaj izpostavimo enake člene

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} = -\left(\Gamma^\mu_{\beta\sigma,\alpha} + \Gamma^\mu_{\beta\alpha,\sigma} + \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}\Gamma^\mu_{\lambda\sigma} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\alpha}\right)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\sigma. \tag{13}$$

V enačbi (13) prepoznamo Riemannov tenzor:

$$R^\mu_{\beta\sigma\alpha} = -\Gamma^\mu_{\beta\sigma,\alpha} + \Gamma^\mu_{\beta\alpha,\sigma} + \Gamma^\lambda_{\beta\alpha}\Gamma^\mu_{\lambda\sigma} - \Gamma^\mu_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\sigma\alpha} \tag{14}$$

Sedaj lahko končno zapišemo enačbo za plimsko silo, znano pod imenom **Geodesic Deviation Equation**:

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\tau^2} = -R^\mu_{\beta\sigma\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\xi^\sigma. \tag{15}$$

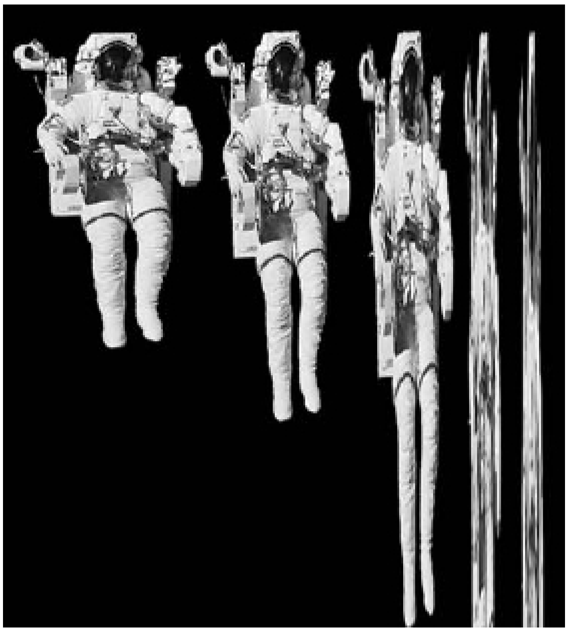
.

Zapišemo lahko tudi **tenzor lokalne plime**:

$$S^\mu{}_\alpha \equiv R^\mu_{\beta\sigma\alpha}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\sigma}{d\tau}, \tag{16}$$

3 Plimske sile pri prostem padu proti Schwarzschildovi črni luknji

V prejšnjem poglavju smo izpeljali enačbo za izračun plimske sile, sedaj pa poglejmo kakšne plimske sile občuti opazovalec, ki prosto pada v polju Schwarzschildove črne luknje. Ker so deli telesa različno oddaljeni od središča, nanje vpliva različno velika gravitacijska sila. Na spodnji del, ki je bližje središču vpliva večja sila kot pa na zgornji, ki je dlje. Telo, ki se ne more zoperstaviti neskončno veliki sili, je podvrženo raztegovanju med spodnjim in zgornjim delom. Vendar pa to še ni vse; pri radialnem prostem padu je prisotno tudi obodno stiskanje. Vsi ti efekti so prikazani na naslednji sliki.



Slika 1: Astronavt, raztegnjen zaradi plimskih sil, v polju črne luknje. Da človek preživi raztezanje pri Schwarzschildovem radiju mora imeti črna luknja veliko maso, večjo od $10^5 M_\odot$ [1].

Pri izračunu plimske sile bomo iz energije in vrtilne količine padajočega objekta najprej zapisali vektor hitrosti, nato zapisali bazo, ki se giblje skupaj z delcem, nato pa izračunali velikosti pospeška v posameznih smereh koordinatnega sistema.

Glede na to, da preučujemo gibanje v polju Schwarzschildove črne luknje, je naslednje podpoglavje namenjeno Schwarzschildovi metriki, nato bomo na kratko predstavili gibanje v efektivnem potencialu in na koncu podrobneje opisali radialni prosti pad.

3.1 Schwarzschildova geometrija

Prvo eksaktno rešitev Einsteinovih enačb polja je 1916 izpeljal Karl Schwarzschild. Rešitev opisuje gravitacijsko polje zunaj nerotirajoče, sferično porazdeljene mase (kot npr. nevrteča zvezda, planet oz. črna luknja). Je dober približek gravitacijskega polja počasi se vrtečega telesa, kot npr. Zemlje ali Sonca.

Schwarzschildova črna luknja je objekt brez vrtilne količine in naboja, ki se od drugega takega objekta loči le po masi. Opisuje jo Schwarzschildova metrika in objekt je karakteriziran z obdajajočo sfero, ki je pogosto imenovana „dogodkovni horizont" ali Schwarzschildov radij. Kakršenkoli nevrteči in nenabit objekt je večji od Schwarzschildovega radija, sicer imamo opravka s črno luknjo.

Natančnejšo izpeljavo Schwarzschildove rešitve lahko najdemo v mnogih knjigah (npr. [1, 2]), zato bomo na tem mestu kar privzeli rezultate. V Schwarzschildovih (sfernih) koordinatah (t, r, Θ, ϕ) ima metrika naslednjo obliko:

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2 \left(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2,\right) \tag{17}$$

pri čemer je r_s Schwarzschildov radij, τ lastni čas gibajočega objekta in t čas merjen v laboratorijskem koordinatnem sistemu.

Schwarzschildov radij r_s z maso povezuje naslednja enačba

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \tag{18}$$

pri čemer je G gravitacijska konstanta ter M masa objekta.

Schwarzschildova metrika je rešitev Einsteinovih enačb polja v vakuumu (praznem prostoru), kar pomeni, da je veljavna le zunaj gravitacijskega telesa, torej le za $r > r_s$.

Pogosto enačbe pišemo v enotah $c = G = 1$. Te enote bomo uporabili v nadaljevanju in tako se enačba (17) zapiše v naslednji obliki

$$ds^2 = (1 - \frac{r_s}{r})dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_s}{r}} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{19}$$

kjer je

$$r_s = 2M. \tag{20}$$

3.1.1 Metrični tenzor in Riemannov tenzor ukrivljenosti

Schwarzschildovo metriko opišemo z naslednjim metričnim tenzorjem:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(1-\frac{2M}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\frac{2M}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{21}$$

Za izračun plimskih sil potrebujemo tudi Riemannov tenzor, ki ga določa metrika. Izračunamo ga s pomočjo Christoffelovih simbolov

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}. \tag{22}$$

Izračun le teh iz metričnega tenzorja pa podaja naslednja enačba:

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m}\right). \tag{23}$$

Na tem mestu podajmo še nekaj enačb, ki jih uporabljamo pri računanju. Za višanje oz. nižanje indeksov Riemannovega tenzorja veljata naslednji zvezi:

$$R_{ijkl} = g_{i\alpha} R^{\alpha}_{jkl} \quad \text{in} R^i_{jkl} = g^{i\alpha} R_{\alpha jkl}, \tag{24}$$

medtem ko za tenzorje velja:

$$X^{\mu}{}_{\nu} = g_{\nu\sigma} X^{\mu\sigma}. \tag{25}$$

3.2 Efektivni potencial in četverec hitrosti

Gibanje telesa z maso m v polju Schwarzschildove črne luknje opišemo z vpeljavo efektivnega potenciala [3]

$$\left(\frac{V_{ef}}{m}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right], \tag{26}$$

kjer m predstavlja maso delca.

Če poznamo energijo E ter vrtilno količino telesa L na začetku lahko določimo orbito gibanja. Kot vemo sta le-ti konstanti gibanja; torej se ohranjata. Ker je Schwarzschildova metrika sferno simetrična, se lahko brez skrbi omejimo le na ekvatorialno ravnino, kar pomeni, $\theta = \pi/2$.

Iz energije in vrtilne količine lahko izračunamo četverec hitrosti delca

$$u^\mu = \left(\frac{E}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, -\sqrt{E^2 - V_{ef}^2}, 0, \frac{L}{r^2}\right), \tag{27}$$

s pomočjo katerega lahko zapišemo matriko Lorentzovega potiska. Lorentzovo matriko znamo zapisati v prostoru Minkovskega, zato moramo najprej naš vektor hitrosti zapisati v tej bazi, ki je ortonormirana.

Naj bo $\mathbf{u} = u^\mu \underline{e}_\mu = \tilde{u}^\mu \hat{\underline{\varepsilon}}_\mu$, pri čemer velja

$$\underline{e}_\mu \cdot \underline{e}_\nu = g_{\mu\nu} \quad \text{ter} \quad \hat{\underline{\varepsilon}}_\mu \cdot \hat{\underline{\varepsilon}}_\nu = \eta_{\mu\nu}. \tag{28}$$

Zvezo med u^μ in $\tilde{u}^\mu$ podaja naslednja enačba

$$\tilde{u}^\mu = u^\mu \sqrt{|g_{\mu\mu}|} = u^\mu \sqrt{g_{\mu\mu}\eta_{\mu\mu}}. \tag{29}$$

Kako izračunamo Lorentzovo matriko nam podaja naslednja enačba:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & \beta_1\gamma & \beta_2\gamma & \beta_3\gamma \\ \beta_1\gamma & 1 + \frac{\beta_1^2\gamma^2}{1+\gamma} & \frac{\beta_1\beta_2\gamma^2}{1+\gamma} & \frac{\beta_1\beta_3\gamma^2}{1+\gamma} \\ \beta_2\gamma & \frac{\beta_1\beta_2\gamma^2}{1+\gamma} & 1 + \frac{\beta_2^2\gamma^2}{1+\gamma} & \frac{\beta_2\beta_3\gamma^2}{1+\gamma} \\ \beta_3\gamma & \frac{\beta_1\beta_3\gamma^2}{1+\gamma} & \frac{\beta_2\beta_3\gamma^2}{1+\gamma} & 1 + \frac{\beta_3^2\gamma^2}{1+\gamma} \end{bmatrix}, \tag{30}$$

kjer je $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2}$ ter $\beta_i = \tilde{u}^i$.

Vrstice Lorentzove matrike nam določajo lokalni, gibajoči se, tetrad Minkovskega $\hat{\underline{\varepsilon}}^\mu$. Zapišemo lahko tudi tetrad glede na lokalni Schwarzschildov koordinatni sistem:

$$\underline{e}^\mu = \hat{\underline{\varepsilon}}^\mu \sqrt{\eta_{jj} g^{jj}}, \tag{31}$$

iz česar lahko izrazimo lokalno triado; 3 lokalne vektorje (vsak ima 4 komponente).

Sedaj imamo vse, kar potrebujemo za izračun vektorja pospeška (enačba (15)). Pospešek a^m je vektor v lokalnem Schw. sistemu, ko je separacija vzdolž m-tega vektorja lokalne triade.

$$(a_m)^i = R^i_{jkl} u^j u^k (\underline{e}_m)^l \tag{32}$$

Zanimamo za komponente pospeška v posameznih smereh koordinatnega sistema (projekcije). Podaja jih naslednja enačba:

$$(a_1, a_2, a_3) = (\mathbf{a}^m \cdot \underline{e}_1, \mathbf{a}^m \cdot \underline{e}_2, \mathbf{a}^m \cdot \underline{e}_3). \tag{33}$$

Z zadnjo enačbo smo zapisali kvadrupolni tenzor, katere komponente podajajo velikosti pospeška v posameznih smereh lokalnega, gibajočega se, koordinatnega sistema.

3.3 Plimske sile pri radialnem prostem padu

V primeru radialnega prostega pada delec nima nobene vrtilne količine, zato se giblje v efektivnem potencialu

$$V_{eff} = 1 - 2M/r. \tag{34}$$

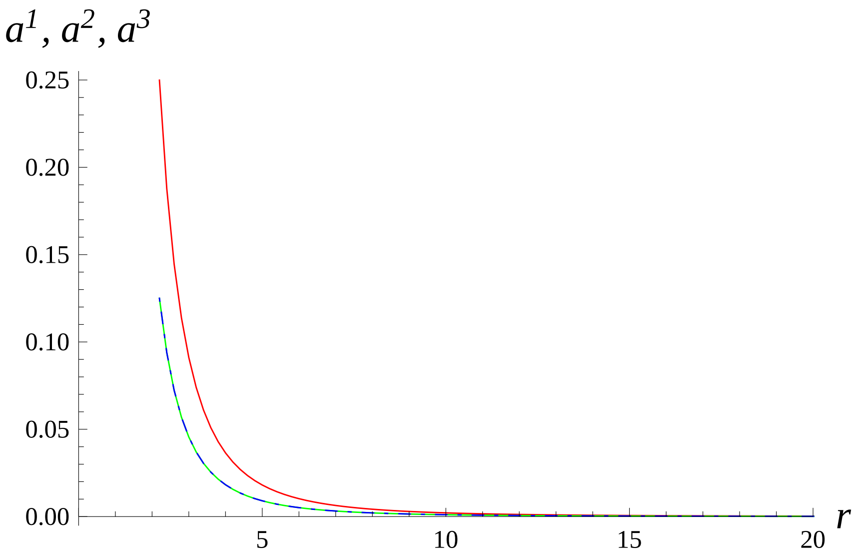
Ker objekt spustimo iz neskončnosti, je energija E padajočega objekta enaka 1 in se, kot že rečeno, ohranja.

Četverec hitrosti padajočega objekta podaja naslednja enačba:

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \left(\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}, 0, 0 \right). \tag{35}$$

Na tem mestu naj omenimo, da tako zapisani izračuni niso eksplicitno odvisni od lastnega časa τ, ampak od radialne koordinate r (merjeno v mirujočih Schw. koordinatah oddaljenega opazovalca). Seveda pa lahko lastni čas izračunamo iz enačb gibanja [1].

Za pospešek v radialni smeri dobimo dokaj zapleteno zvezo, zato je ne bom pisal. Menim, da je bolj nazorno, da si pogledamo kako se vse tri diagonalne komponente spreminjajo med približevanjem horizontu, kar je prikazano na naslednji sliki.



Slika 2: Spreminjanje absolutnih vrednosti komponent pospeška pri radialnem prostem padu z oddaljenostjo r od središča črne luknje ($r > 2M$). Pospešek v radialni smeri prikazuje rdeča barva, v njej ortogonalnih smereh pa zelena in modra. Na sliki je namerno narisana absolutna vrednost, saj sem s tem želel pokazati, da je radialna komponenta 2 krat večja od ostalih dveh. Razdalja je izražena v enotah mase M; $r = kM$, pri čemer je $k > 2$ in M=1.

O pravilnosti rezultata nas prepričajo neničelne komponente samo po diagonali. Prva komponenta kaže na radialno raztezanje (predznak +), ostali pa sta negativni (predznak -) in kažeta na obodno stiskanje.

Komponente pospeška so odvisne od razmerja

$$\frac{M}{r^3}, \tag{36}$$

kar kaže na to, da se z večanjem mase črne luknje M plimske sile pri dani oddaljenosti manjšajo, z bližanjem horizontu, pri dani masi M pa seveda večajo.

Kvadrupolni tenzor pospeška pri radialni oddaljenosti $r = 4M$ je

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{32M^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{64M^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{64M^2} \end{pmatrix} \tag{37}$$

ter pri radialni oddaljenosti $r = 3M$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \frac{2}{27M^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{27M^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{27M^2} \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Literatura

[1] M. P Hobson, G. P. Efstathiou in A. N. Lasenby. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press, 2006.

[2] C. W. Misner, K. S Thorne in J. A. Wheeler. *Gravitation*. University of Maryland, California, 1970.

[3] E. F. Taylor in J. A. and Wheeler. *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*. Addison Wesley Longman, Inc., 2000.