Martin Vodopivec

Domača naloga pri predmetu astronomski seminar

Ljubljana, 06.10.2005

1. Naloga

Izpelji ter primerjaj sevanje gravitacijskega in električnega kvadrupola.

2. Električni kvadrupol

Izpeljavo sevanja za električni kvadrupol začnemo z retardiranim električnim potencialom:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}'$$

Ker gledamo sevanje v veliki razdalji od izvora ($r >> r'$), lahko pod ulomkovo črto namesto $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ pišemo kar r. Tako nam pod integralom ostane le gostota električnega naboja. Tu naredimo razvoj časovnega argumenta za majhne $\mathbf{r}'$:

$$\rho\big(\mathbf{r}', t - \tfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\big) = \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t}\frac{r_i r_i'}{cr} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\frac{r_i r_j r_i' r_j'}{c^2 r^2} + ...$$

Prvi člen predstavlja monopolni del, drugi dipolni del in tretji kvadrupolni del. Ker nas zanima sevanje kvadrupola, obdržimo le tretji člen in zopet zapišemo enačbo za električni potencial:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r c^2}\frac{r_i}{r}\frac{r_j}{r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int r_i' r_j'\,\rho(\mathbf{r}', t - r)\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}'$$

Pri tem vemo, da se tenzor kvadrupolnega momenta zapiše kot: $Q_{ik} = \int (r_i' r_k' - \frac{1}{3}\delta_{ik} r'^2)\rho\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}'$. To uporabimo v zgornji enačbi in zapišemo:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r c^2}\frac{r_i}{r}\frac{r_j}{r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(Q_{ij} + \frac{1}{3}\int \delta_{ij} r'^2 \rho \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\right)$$

Drugi člen lahko izpustimo, saj gre za monopolni člen, ki ne prispeva k gostoti sevanega toka. Tako smo dobili enačbo za električni in posledično tudi magnetni potencial:

$$\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{r_i}{r}\frac{r_j}{r}\ddot{Q}_{ij}$$

$$A_i(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{8\pi c r}\frac{r_j}{r}\ddot{Q}_{ij}$$

Z uporabo ustrezne Maxwellove enačbe dobimo gostoto magnetnega polja:

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{8\pi c}\,\mathrm{rot}\left(\frac{\ddot{\mathbb{Q}}\cdot\mathbf{r}}{r^2}\right) = \frac{\mu_0}{8\pi c}\left(\frac{1}{r^2}\mathrm{rot}(\ddot{\mathbb{Q}}\cdot\mathbf{r}) + \nabla(\frac{1}{r^2}) \times \ddot{\mathbb{Q}}\cdot\mathbf{r}\right)$$

Člen kjer nastopa $\nabla(1/r^2)$ lahko zanemarimo, saj pada z drugo potenco radija. Tako nam ostane:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{8\pi c}\frac{1}{r^2}\mathrm{rot}(\ddot{\mathbb{Q}}\cdot\mathbf{r})$$

$$\mathrm{rot}(\ddot{\mathbb{Q}}\cdot\mathbf{r}) = \varepsilon_{ijk}\nabla_j \ddot{Q}_{kl} r_l = \varepsilon_{ijk}\ddot{Q}_{kl,j} r_l + \varepsilon_{ijk}\ddot{Q}_{kj}$$

Drugi člen odpade, saj je tenzor $\ddot{Q}_{kj}$ simetričen, ε_{ijk} pa antsimetričen, kar nam da kot rezultat same ničle.

$$\ddot{Q}_{ik,j} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int (r_i' r_k' - \frac{1}{3} r'^2 \delta_{ik}) \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t - r/c)}{\partial r_j} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}' = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int (r_i' r_k' - \frac{1}{3} r'^2 \delta_{ik}) \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{r_j}{cr} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{r_j}{c} \int (r_i' r_k' - \frac{1}{3} r'^2 \delta_{ik}) \rho \mathrm{d}^3\mathbf{r}' = \frac{1}{c} \frac{r_j}{r} \dddot{Q}_{ik}$$

Tako smo dobili gostoto magnetnega polja in posledično tudi jakost električnega polja (zaradi preprostejšega zapisa vpeljemo $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$):

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{8\pi c r} \left(\dddot{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{n} \right)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{8\pi \varepsilon_0 c^3 r} \left(\dddot{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{n} \right) \times \mathbf{n}$$

Zanima nas gostota energijskega toka, zato bi radi izračunali vrednost Poyntingovega vektorja: $\mathbf{P} = \frac{1}{\mu_o} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Iz zgornjega zapisa je očitno, da sta vektorja $\mathbf{B}$ in $\mathbf{E}$ med seboj pravokotna, prav tako pa sta pravokotna na $\mathbf{r}$. Torej bo Poyntingov vektor vzporeden $\mathbf{r}$, njegova dolžina pa bo kar produkt dolžin vektorjev jakosti električnega in gostote magnetnega polja:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{64\pi^2 c^4 r^2} \left| \dddot{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{n} \right|^2 \mathbf{n}$$

3. Gravitacijski kvadrupol

Izračuna se lotimo z enačbo za šibko gravitacijsko polje (linearna aproksimacija):

$$\bar{h}_{\mu\nu,}{}^{\lambda}{}_{\lambda} = \kappa T_{\mu\nu}$$

To seveda močno spominja na enačbe elektromagnetnega polja:

$$A_{\mu,}{}^{\lambda}{}_{\lambda} = -\mu_0 j_\mu$$

Kar nas navede na misel, da zapišemo retardirano rešitev za $\bar{h}_{\mu\nu}$ enako kot smo zapisali retardirane potenciale v elektromagnetizmu:

$$\bar{h}_{\mu\nu}(ct, \mathbf{r}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{T^{\mu\nu}(ct - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}'$$

Ker nas zanima polje v veliki oddaljenosti od izvora in predvidevamo, da so časovne spremembe relativno počasne, lahko, v prvem približku, namesto $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ povsod pišemo kar r:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{4\pi r} \int T^{\mu\nu}(ct - r, \mathbf{r}') \mathrm{d}^3\mathbf{r}'$$

Na tem mestu se poslužimo zakona o ohranitvi mase-energije:

$$\eta^{\mu\nu} T_{\alpha\mu,\nu} = 0$$

Če zgornjo enačbo razbijemo na časovne in krajevne komponente dobimo:

$$T^{k0}{}_{,0} = -T^{kl}{}_{,l}$$
$$T^{00}{}_{,0} = -T^{0l}{}_{,l}$$

Če integriramo prvo enačbo dobimo:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial ct}\int (T^{k0} r^l + T^{l0} r^k) \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int T^{kl} \mathrm{d}^3\mathbf{r}$$

Sedaj integriramo še drugo enačbo in dobimo:

$$\frac{\partial}{\partial ct}\int T^{00} r^k r^l \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int (T^{k0} r^l + T^{l0} r^k) \mathrm{d}^3\mathbf{r}$$

Če združimo oba dobljena izraza, lahko zapišemo:

$$\int T^{kl} \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int T^{00} r^k r^l \mathrm{d}^3\mathbf{r}$$

Kar kaže na to, da za izračun krajevnih komponent tenzorja $\bar{h}^{\mu\nu}$ zadostuje poznati le vrednost T^{00}. Stvar ni tako presenetljiva, saj smo pri izračunih za električni kvadrupol storili isto. Tako kot tam nismo potrebovali električnih tokov, tudi tu ne potrebujemo toka mase-energije in nam za izračun zadostuje že gostota mase-energije. Pri majhnih hitrostih lahko zapišemo $T^{00} = \rho c^2$ in tako sledi:

$$\bar{h}^{kl}(ct, \mathbf{r}) = \frac{\kappa}{8\pi r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \rho x'^k x'^l \mathrm{d}^3\mathbf{r}$$

V tem takoj prepoznamo tenzor kvadrupolnega momenta, saj je izraz povsem podoben enačbi, ki smo jo zapisali že za retardirani električni potencial, le da tu namesto gostote naboja nastopa gostota mase. Tudi tokrat nam, če integral nadomestimo s tenzorjem kvadrupolnega momenta, ostane dodaten člen, ki vsebuje tenzor delta in kvadrat vektorja **r**, vendar ga lahko zanemarimo, prav tako in z istimi argumenti, kot smo to storili pri električnem kvadrupolu.

$$\bar{h}^{kl}(ct, \mathbf{r}) = \frac{\kappa}{8\pi r}\ddot{Q}^{kl}$$

Zanima nas gostota energijskega toka, torej potrebujemo napetostni tenzor gravitacijskega polja. Pravzaprav potrebujemo le tiste komponente, ki predstavljajo gostoto toka mase-energije. Do željenega izraza bomo prišli z opazovanjem gibanja delca v gravitacijskem polju. Najprej zapišemo gibalne enačbe:

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\dot{x}^\nu] - \frac{m}{2} h_{\lambda\sigma,\nu}\dot{x}^\lambda \dot{x}^\sigma = 0$$

Divergenco napetostnega tenzorja za delec zapišemo kot:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}(x^\lambda) = m\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\dot{\xi}^\mu(\tau)\delta^4(x^\lambda - \xi^\lambda(\tau))\mathrm{d}\tau$$

Opazimo, da bi bilo smiselno integrandu spustiti indekse z uporabo celotnega metričnega tenzorja, saj bi tako dobili izraz, ki močno spominja na prvi člen v enačbah gibanja:

$$T_{\mu\nu}{}^{,\nu}(x^\lambda) = m\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})\dot{\xi}^\mu(\tau)]\delta^4(x^\lambda - \xi^\lambda(\tau))\mathrm{d}\tau$$

V skladu s kalibracijsko invariantnostjo gravitacijskega polja zapišemo:

$$T_{\mu\nu}{}^{,\nu} + t_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0$$

Tu smo s $t_{\mu\nu}$ zapisali napetostni tenzor gravitacijskega polja. Iz zgornjih enačb sledi, da lahko divergenco omenjenega tenzorja izrazimo kot:

$$t_{\mu\nu}{}^{,\nu}(x^\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m}{2}\,h_{\lambda\sigma,\mu}(x^\omega)\,\dot{\xi}^\lambda\dot{\xi}^\sigma\,\delta^4(x^\omega - \xi^\omega(\tau))\mathrm{d}\tau$$

Pod integralom prepoznamo napetostni tenzor delca in preprosto zapišemo:

$$t_{\mu\nu}{}^{,\nu}(x^\omega) = -h_{\lambda\sigma,\mu}(x^\omega)\,T^{\lambda\sigma}$$

Na tem mestu uporabimo gravitacijske enačbe za šibko polje (prva vrstica v začetku tega poglavja) in se dokočno znebimo količin, ki se nanašajo na delec:

$$t_{\mu\nu}{}^{,\nu}(x^\omega) = -\frac{1}{\kappa}\,h_{\lambda\sigma,\mu}(x^\omega)\,\bar{h}^{\lambda\sigma,\beta}{}_\beta = -\frac{1}{\kappa}\,[\bar{h}_{\lambda\sigma,\mu}(x^\omega) - \eta_{\lambda\sigma}\bar{h}_{,\mu}(x^\omega)]\bar{h}^{\lambda\sigma,\beta}{}_\beta$$

Tako naposled dobimo izraz za napetostni tenzor gravitacijskega polja:

$$t^{\mu\nu} = \frac{1}{4\kappa}\left(2\bar{h}^{\alpha\beta,\mu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\nu} - \bar{h}^{,\mu}\bar{h}^{,\nu} - \eta^{\mu\nu}(\bar{h}^{\alpha\beta,\sigma}\bar{h}_{\alpha\beta,\sigma} - \tfrac{1}{2}\bar{h}_{,\sigma}\bar{h}^{,\sigma})\right)$$

Zanima nas gostota energijskega toka v radialni smeri, zato zapišemo:

$$t^{0i}n^i = \frac{n^i}{4\kappa}\left(2\bar{h}^{\alpha\beta,0}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,i} - \bar{h}^{,0}\bar{h}^{,i}\right)$$

Pri tem je $\mathbf{n}$ smerni vektor ($\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$). Ker poznamo le krajevne komponente tenzorja $\bar{h}$, posebej zapišemo časovne in krajevne dele:

$$t^{0i}n^i = \frac{n^i}{4\kappa}\left(2\bar{h}^{kl,0}\bar{h}^{kl,i} - 4\bar{h}^{k0,0}\bar{h}^{k0,i} + 2\bar{h}^{00,0}\bar{h}^{00,i} - \bar{h}^{kk,0}\bar{h}^{ll,i} + \bar{h}^{kk,0}\bar{h}^{00,i} + \bar{h}^{00,0}\bar{h}^{kk,i} - \bar{h}^{00,0}\bar{h}^{00,i}\right)$$

Sedaj upoštevamo da je sled tenzorja kvadrupolnega momenta enaka nič. Pri krajevnih odvodih, lahko člen, kjer odvajamo faktor $1/r$ zanemarimo, saj z razdaljo hitro pada. Drugi člen ohranimo in zapišemo:

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,i} = -\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,0} n^i$$
$$\bar{h}^{\mu\nu,i} = \bar{h}^{\mu\nu,0} n^i$$

Tu gre za isto stvar, ki nam je prinesla tretji časovni odvod pri električnem kvadrupolu. Ker r nastopa le v časovnem delu kvadrupolnega tenzorja, lahko krajevni odvod nadomestimo s časovnim in to nam bo tudi tu prineslo tretji časovni odvod kvadrupolnega momenta. Za ostale člene uporabimo umeritveni pogoj ($\bar{h}_{\mu\lambda}{}^{;\lambda}$) in povsod prevedemo časovne komponente v krajevne:

$$\bar{h}^{k0}{}_{,0} = -\bar{h}^{kl}{}_{,l} = \bar{h}^{kl}{}_{,0} n^l$$
$$\bar{h}^{00,0} = \bar{h}^{0l}{}_{,l} = \bar{h}^{0l}{}_{,0} n^l = \bar{h}^{kl}{}_{,0} n^k n^l$$

Sedaj lahko zapišemo gostoto energijskega toka s krajevnimi komponentami gravitacijskega tenzorja, te pa lahko nadomestimo z elementi tenzorja kvadrupolnega momenta in dobimo:

$$t^{0i} n^i = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\kappa}{8\pi r}\right)^2 \left(\frac{1}{2} \dddot{Q}^{kl} \dddot{Q}^{kl} - \dddot{Q}^{kl} \dddot{Q}^{km} n^l n^m + \frac{1}{4} \dddot{Q}^{kl} \dddot{Q}^{ms} n^k n^l n^m n^s\right)$$

4. Nihajoči in rotirajoči kvadrupoli

Vzemimo električni kvadrupol sestavljen iz dveh negativnih nabojev v sredini koordinatnega sistema in dveh v nasprotnih smereh od izhodišča enako oddaljenih pozitivnih nabojev. Za sistem diskretno porazdeljenih nabojev zapišemo kvadrupolni moment takole:

$$Q_{mn} = \sum_i e_i (r_{im} r_{in} - \frac{1}{3} \delta_{mn} r^2)$$

Za nihajoči električni kvadrupol, kjer pozitivna naboja ležita v smeri osi z, je torej tenzor kvadrupolnega momenta (pozitivna naboja nihata v smeri proti izhodišču, negativni naboj miruje):

$$\mathbb{Q} = e_0 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} d^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} d^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} d^2 \end{pmatrix} \qquad d = a + b \cdot \cos(\omega t)$$

Sedaj zapišemo še tretji časovni odvod:

$$\dddot{Q}_{11} = \dddot{Q}_{22} = -4b^2 e_0 \omega^3 \cos(\omega t) \sin(\omega t) - \frac{4}{3} b^2 e_0 \omega^3 \cos(\omega t) \sin(\omega t) - \frac{4}{3} a b e_0 \omega^3 \sin(\omega t) \simeq -\frac{4}{3} a b e_0 \omega^3 \sin(\omega t)$$

$$\dddot{Q}_{33} = 8b^2 e_0 \omega^3 \cos(\omega t) \sin(\omega t) + \frac{8}{3} b^2 e_0 \omega^3 \cos(\omega t) \sin(\omega t) - \frac{8}{3} a b e_0 \omega^3 \sin(\omega t) \simeq \frac{8}{3} a b e_0 \omega^3 \sin(\omega t)$$

d je oddaljenost obeh pozitivnih nabojev od izhodišča. Pri tem velja $a >> b$, kar smo upoštevali v zgornjih izračunih in zato zanemarili vse člene kjer nastopa b^2. Lotimo se še izračuna za rotirajoči električni kvadrupol (tokrat je smer z os rotacije, negativni naboj miruje v izhodišču, pozitivna naboja krožita v xy ravnini):

$$\mathbb{Q} = e_0 \begin{pmatrix} 2d^2(\cos^2(\omega t) - \frac{1}{3}) & 2d^2(\cos(\omega t)\sin(\omega t)) & 0 \\ 2d^2(\cos(\omega t)\sin(\omega t)) & 2d^2(\cos^2(\omega t) - \frac{1}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}d^2 \end{pmatrix}$$

Zapišemo tretji časovni odvod:

$$\dddot{Q}_{11} = -\dddot{Q}_{22} = 16d^2 e_0 \omega^3 \cos(\omega t)\sin(\omega t) = 8d^2 e_0 \omega^3 \sin(2\omega t)$$
$$\dddot{Q}_{12} = \dddot{Q}_{21} = -8d^2 e_0 \omega^3 (1 - 2\sin^2(\omega t)) = -8d^2 e_0 \omega^3 \cos(2\omega t)$$

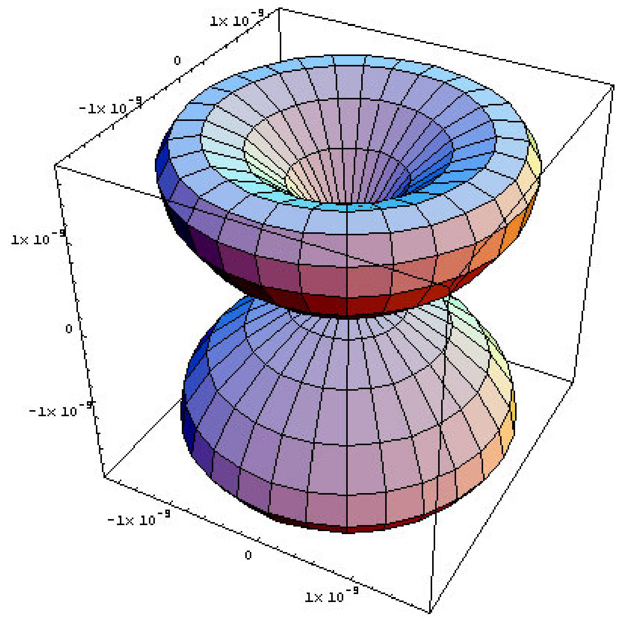
Gravitacijski kvadrupol sestavimo iz dveh enakih krogel, razdaljo med njima označimo z $2d$. Pri gravitacijskem kvadrupolu, tako zapišemo kvadrupolni moment in časovne odvode povsem enako, kot pri električnem kvadrupolu, le da namesto naboja uporabimo maso krogle. Lahko bi vzeli različni krogli, ki bi v primeru rotirajočega kvadrupola krožili okrog skupnega težišča, vendar bi bili izračuni povsem podobni, le da bi v njih nastopala reducirana masa.

5. Komentar

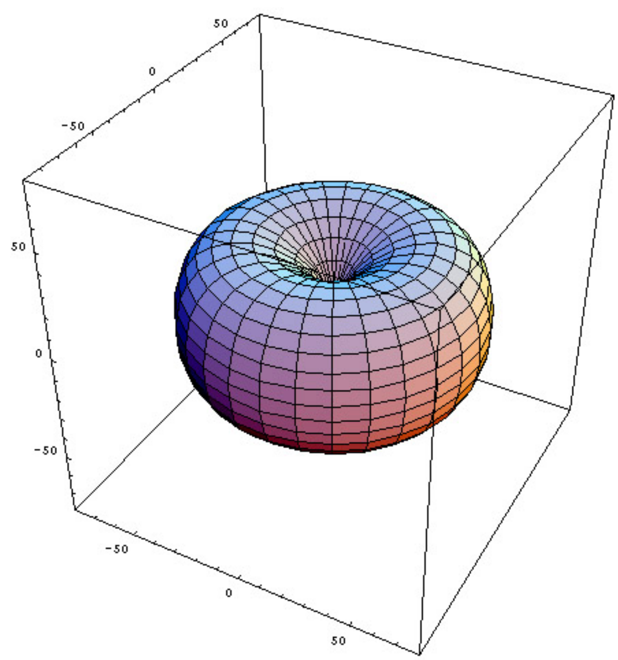
Da bi dobili predstavo o izsevanem valovanju, si narišemo izsevano gostoto toka v posamezni smeri. Sam sem za risanje uporabil program Mathematica.

Med prikazanimi slikami ni videti kakšne posebne podobnosti. Še najbolj sta si podobni sliki 2 in 3, vendar je slednja precej bolj spolščena. Čeprav so uporabljeni tenzorji skorajda identični, je gostota izsevane energije v nek prostorski kot povsem drugačna. Če v teh slikah že iščemo povezave med elektromagnetnim in gravitacijskim valovanjem, praktično ne moremo zgrešiti podobnosti med sevanjem nihajčega gravitacijskega kvadrupola (Slika 3) in sevanjem električnega dipola. Tudi sicer primerjava med sevanjem gravitacijskega kvadrupola in električnega dipola ni nesmiselna, saj gre v obeh primerih za sevanje ki ustreza prvemu približku retardirane rešitve enačbe polja.

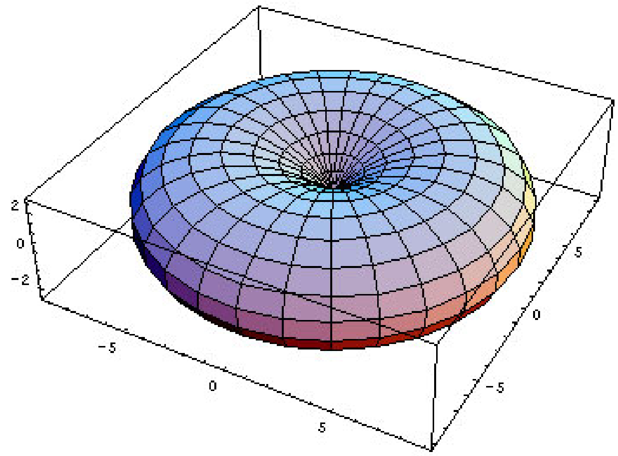
Po dobljenih izračunih sodeč (Slika 4), bi morala dvozvezdja sevati največjo gostoto toka v smeri pravokotno na ravnino gibanja obeh zvezd. Žal so dvozvezdja neprimerni izvori za detekcijo gravitacijskih valov, saj je frekvenca izsevanega valovanja nižja od delovnega območja detektorjev.



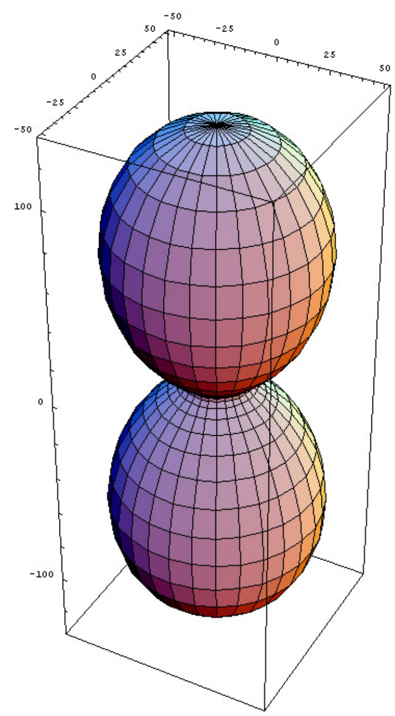
SLIKA 1. Nihajoči električni kvadrupol



SLIKA 2. Rotirajoči električni kvadrupol



Slika 3. Nihajoči gravitacijski kvadrupol



Slika 4. Rotirajoči gravitacijski kvadrupol