

Astrofizika

Model zvezde z zgornjega dela ZAMS

Dejan Paradiž
FMF

1. julij 2008

1 Uvod

Naloga je rekonstruirati zvezdo z zgornjega dela ZAMS s Schwarzschildovim modelom v U-V ravnini in s predpostavko, da v sevalni atmosferi prevladuje prosto-prosta absorpcija (Kramers). Za konstrukcijo modela si najprej pogledjmo enačbe, ki opisujejo strukturo sferično simetrične zvezde v stacionarnem stanju [1, stran 64 (*Previzujemo časovno neodvisnost vseh količin*)].

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_n - \epsilon_\nu, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla. \quad (4)$$

r , m , ρ , P , l , T pomenijo radij, masa, gostota, tlak, izsev in temperatura. G je gravitacijska konstanta. ϵ_n in ϵ_ν predstavljata moč, proizvedeno z jedrskimi reakcijami in izgubo moči zaradi nevtrinskega izseva na enoto mase. V enačbi (4) je oblika brezdimenzijskega gradienta ∇ odvisna od načina prenosa energije. Pri sevalnem prenosu se zapiše [1, stran 32]:

$$\nabla_{rad} = \frac{3}{64\sigma\pi G} \frac{\kappa l P}{m T^4}, \quad (5)$$

kjer κ predstavlja absorpcijski koeficient in σ Stefanovo konstanto. V primeru konvekcijskega prenosa energije ∇ zamenjamo z adiabatnim gradientom ∇_{ad} , ki ima naslednjo obliko [1, stran 105]:

$$\nabla_{ad} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_S = 1 - \frac{1}{\gamma}, \quad (6)$$

kjer je γ adiabatni eksponent. Za opis zvezde moramo k enačbam (1-4) dodati še enačbo stanja

$$\rho = \frac{\bar{\mu} P}{\Re T}, \quad (7)$$

kjer je $\bar{\mu}$ povprečna molska masa in \Re splošna plinska konstanta. Ta enačba nam daje dodatno zvezo med P , T in ρ .

Zvezde z zgornjega dela ZAMS so zelo masivne. Zaradi masivnosti v jedru poteka gorenje vodika po CNO ciklu. Ker je pri tem ciklu proizvedena moč močno odvisna od temperature, je v jedru edini učinkovit prenos energije preko konvekcije. Zato bo naš model sestavljen iz konvekcijskega jedra in sevalne ovojnice.

2 Konvekcijsko jedro

Ker v jedru poteka prenos energije s konvekcijo, nam enačba (6) podaja zvezo med tlakom in temperaturo, katero lahko s pomočjo enačbe stanja (7) prevedemo na naslednjo politropno relacijo

$$P = K\rho^\gamma, \quad (8)$$

kjer je K politropna konstanta. Ta politropna zveza nam omogoča, da obravnavamo enačbi (1) in (2) kot sistem dveh diferencialnih enačb. V tem primeru je smiselno zamenjati neodvisno spremenljivko m z r in enačbo (2) prepisati v

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \rho. \quad (9)$$

Vpeljali smo gravitacijski potencial ϕ , ki je rešitev Poissonove enačbe

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (10)$$

kjer ∇ predstavlja Laplasov operator. Z uporabo enačbe (8) lahko iz enačbe (9) izločimo P in dobimo

$$\frac{d\phi}{dr} = -\gamma K \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr}. \quad (11)$$

V primeru, ko $\gamma \neq 1$ lahko enačbo (11) integriramo in dobimo

$$\rho = \left(\frac{-\phi}{(n+1)K} \right)^n, \quad (12)$$

kjer je $n = 1/(\gamma - 1)$ politropni indeks. To vrednost ρ vstavimo v enačbo (10) in dobimo

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi}{dr} = 4\pi G \left(\frac{-\phi}{(n+1)K} \right)^n, \quad (13)$$

kjer smo uporabili Laplasov operator v sferičnih koordinatah. To enačbo prevedemo v brezdimenzijsko obliko z uvedbo naslednjih brezdimenzijskih spremenljivk [1, stran 176]

$$z = Ar, \quad (14)$$

$$A^2 = \frac{4\pi G}{(n+1)K} \rho_c^{\frac{n-1}{n}}, \quad (15)$$

$$w = \frac{\phi}{\phi_c} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{1/n}, \quad (16)$$

pri čemer se indeks c nanaša na vrednost količine v centru. Tako dobimo znano Lane-Emdenove enačbo

$$\frac{1}{z^2} \frac{d}{dz} \left(z^2 \frac{dw}{dz} \right) + w^n = 0. \quad (17)$$

Iz definicije (16) vidimo, da mora pri $z = 0$ veljati $w = 1$ in $dw/dz = 0$. Da zagotovimo te robne pogoje, funkcijo $w(z)$ razvijemo v potenčno vrsto v okolici $z = 0$. Ko poznamo funkcijo $w(z)$, dobimo tlak in temperaturo preko naslednjih relacij

$$P = P_c w^{n+1} \text{ in } T = T_c w \quad (18)$$

3 Sevalna ovojnica

Sevalno ovojnico opišemo s sistemom diferencialnih enačb, ki jih dobimo iz (1 – 4) in (7) z uvedbo brezdimenzijskih spremenljivk x, q, t in y za radij, maso, temperaturo in tlak na sledeč način [1, stran 203]

$$P = \frac{GM^2}{4\pi R^4} y, T = \frac{\bar{\mu}}{\mathfrak{R}} \frac{GM}{R} t, m = qM, r = xR, \quad (19)$$

kjer je M celotna masa zvezde in R polmer zvezde. Sedaj imajo enačbe naslednjo obliko 

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{t}{x^2 y}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial y}{\partial q} = -\frac{q}{x^4}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial l}{\partial q} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial t}{\partial q} = -C \frac{y^a}{t^{a+b+3} x^4}, \quad (23)$$

$$\rho = \frac{M}{4\pi R^3} \frac{y}{t}, \quad (24)$$

kjer je

$$C = \frac{3\kappa_0}{16\sigma(4\pi)^{a+2}} \left(\frac{\mathfrak{R}}{\bar{\mu}G}\right)^{b+4} L R^{b-3a} M^{a-b-3}. \quad (25)$$

L je celotni izsev zvezde. V enačbi (22) predpostavimo, da v ovojnici ni proizvodnje energije, v enačbi (23) pa Kramersovo potenčno zvezo za absorpcijski koeficient

$$\kappa = \kappa_0 \rho^a T^{-b}, \quad (26)$$

kjer je κ_0 primerna konstanta (v primeru prosto-proste absorpcije $\kappa_0 = 7.6 \cdot 10^{24} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$ [1, stran 142]).

Ker je na površju $\rho = 0$ in $P = 0$ morajo rešitve diferencialnih enačb (20 – 23) pri $q = 1$ zadostiti naslednjim robnim pogojem:

$$y(1) = 0, x(1) = 1 \text{ in } \frac{y(1)}{t(1)} = 0. \quad (27)$$

Vidimo, da je pri teh robnih pogojih enačba (20) singularna na površju. To singularnost obidemo tako, da predpostavimo, da je v tanki plasti blizu površja q konstantno enak 1. S to predpostavko dobimo iz (20) in (23) naslednji dve diferencialni enačbi:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{C} \frac{t^{a+b+3}}{y^a} \text{ in } \frac{dt}{dx} = -\frac{a+1}{a+b+4} \frac{1}{x^2} \quad (28)$$

Najprej integriramo drugo enačbo od $x = 1$ do $x = 1 - \xi$, kjer je $\xi \ll 1$. Tako dobimo robni pogoj za temperaturo tik pod površjem. Nato integriramo prvo enačbo od $T = 0$ do temperature, ki smo jo dobili z integracijo druge enačbe. Tako dobimo robne pogoje za x, y in t tik pod površjem. Enačbe (20 – 23) so singularne tudi v centru, vendar nas to ne moti, ker jih integriramo samo do jedra.

4 Združevanje jedra in ovojnice v U-V ravnini

Rešitvi konvekcijskega jedra in sevalne ovojnice morata pri določenem radiju zvezno in odvedljivo preiti druga v drugo. Ker pa imata spremenljivki x in z različne enote za radij, je Schwarzschild vpeljav koordinati U in V , ki sta definirani na naslednji način [1, stran 200]:

$$U = \frac{d \ln(m)}{d \ln(r)} = \frac{4\pi r^3 \rho}{m}, V = -\frac{d \ln(P)}{d \ln(r)} = \frac{\rho}{P} \frac{GM}{r}. \quad (29)$$

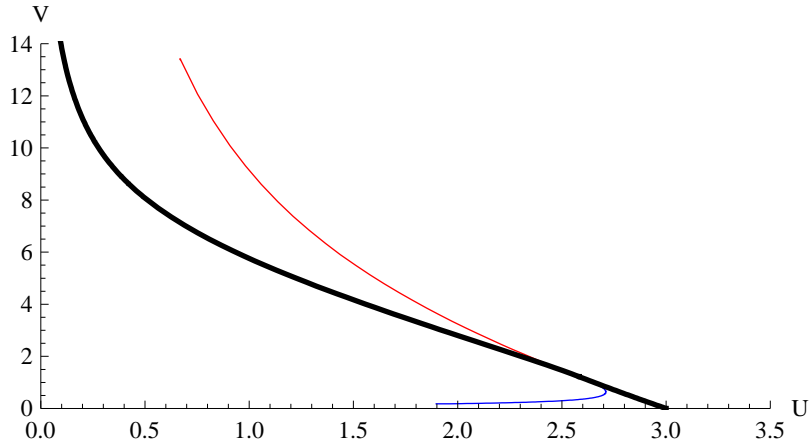
V teh koordinatah je jedro zvezde v točki ($U = 3, V = 0$), površina pa pri ($U = 0, V \rightarrow \infty$). V primeru politropnega modela se U in V zapišeta kot

$$U_p = -w^n \left(\frac{1}{z} \frac{dw}{dz} \right)^{-1}, \quad V_p = -(n+1) \frac{z}{w} \frac{dw}{dz} \quad (30)$$

in za sevalno ovojnico

$$U_s = \frac{x^3 y}{qt}, \quad V_s = \frac{q}{tx} \quad (31)$$

Politropni model nam daje eno samo rešitev v U - V ravnini, medtem ko nam sevalni model podaja celotno družino rešitev. Da bi poiskali pravilno rešitev sevalne ovojnice, ki se zvezno in odvedljivo sklopila z rešitvijo politropnega modela, najprej izberemo konstanto C . Z izbiro konstante določimo rešitev za sevalno ovojnico, na kateri poiščemo točko (U^*_s, V^*_s), kjer je $\nabla_{rad} = \nabla_{ad}$. Zaradi zveznosti velja $U^*_s = U^*_p$ in $V^*_s = V^*_p$. Sedaj lahko s pomočjo definicij (30) izračunamo kateri parameter z določa vrednosti U^*_p in V^*_p . Ta je načeloma lahko različen. Ker pa je rešitev politropnega modela ena sama, mora veljati za obe vrednosti en sam z , kar dosežemo s pravilno izbiro konstante C . Tako dobljen model je prikazan na spodnji sliki.



Slika 1: Model zvezde v U - V ravnini s politropnim modelom jedra $n = 3/2$ (rdeče) in sevalno ovojnico $z = 1$ in $b = 3.5$ (modro). Konstanta $C = 1.028202 \cdot 10^{-6}$.

Z združevanja jedra in ovojnice dobimo konstanto C , ki nam preko enačbe (25) podaja relacijo med R , M in L . Ker je L določen s proizvodnjo energije v jedru, za katero prevzamemo potenčno odvisnost

$$\epsilon = \epsilon_0 \rho T^\nu, \quad (32)$$

lahko iz enačbe (3) dobimo še eno zvezo med R , M in L . Najprej zamenjamo neodvisno spremenljivko m z r in enačbo (3) zapišemo kot

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} = \frac{4\pi\epsilon_0}{L} r^2 \rho^2 T^\nu. \quad (33)$$

Tukaj smo upoštevali proizvodnjo energije po enačbi (32) in vpeljali brezdimenzijsko spremenljivko $\lambda = l/L$. Ker poteka proizvodnja energije samo v konvekcijskem jedru, enačbo (33) prepisemo v

$$\frac{d\lambda}{dz} = B z^2 w^{\nu+2n}, \quad B = \frac{4\pi\epsilon_0}{L} \left(\frac{x^* R}{z^*} \right)^3 \rho_c^2 T_c^\nu. \quad (34)$$

Tukaj smo uporabili politropno zvezo (16) za gostoto in (18) za temperaturo. Radij zvezde smo sklopili s spremenljivko z preko zveze $r = z x^* R / z^*$, kjer se vrednosti z^* nanašajo na vrednosti v

stečišču politropnega in sevalnega modela. Sedaj lahko centralno gostoto ρ_c in centralno temperaturo T_c izrazimo z naslednjima zvezama [1, stran 205]:

$$\rho_c = \frac{M}{4\pi R^3} \frac{y^*}{t^* w^{*n}}, \quad (35)$$

$$T_c = \frac{\bar{\mu} GM}{\mathfrak{R} R} \frac{t^*}{w^*}. \quad (36)$$

Tako kot prej se vrednosti z * nanašajo na količine v stečišču ovojnice in jedra. Tako dobimo dodatno zvezo med R , M in L , ki je

$$B = B_0 \frac{\epsilon_0}{4\pi} \left(\frac{\bar{\mu}G}{\mathfrak{R}}\right)^\nu \frac{M^{\nu+2}}{LR^{\nu+3}}, \quad (37)$$

kjer je $B_0 = y^{*2} t^{*\nu-2} x^{*3} w^{*-2n-\nu} z^{*3}$. Ker se L proizvede le v jedru, velja $\lambda = l/L = 1$ v točki stečišča. Tako nam integracija enačbe (33) določi konstanto B z:

$$1 = B \int_0^{z^*} z^2 w^{\nu+2n} dz. \quad (38)$$

Sedaj lahko iz enačbe (25) in (37) izrazimo L in R kot funkcijo M na sledeč način

$$R = \left(\frac{3\epsilon_0\kappa_0 B_0}{16\sigma(4\pi)^{a+3}CB} \left(\frac{\mathfrak{R}}{\bar{\mu}G}\right)^{b+4-\nu}\right)^{\frac{1}{\nu+3+3a-b}} M^{\frac{\nu+2+a-b-3}{\nu+3-b+3a}} \quad (39)$$

$$L = \left(\frac{3\kappa_0}{16\sigma(4\pi)^{a+2}C} \left(\frac{\mathfrak{R}}{\bar{\mu}G}\right)^{\frac{3b+4\nu+12+3a\nu}{\nu+3}} \left(\frac{B_0\epsilon_0}{B4\pi}\right)^{\frac{b-3a}{\nu+3}}\right)^{\frac{1}{\nu+3+3a-b}} M^{\frac{9+3a+b+4\nu+2a\nu}{\nu+3+3a-b}} \quad (40)$$

Tako dobimo model z eno samo neodvisno spremenljivko M oziroma centralno temperaturo T_c . Z izbiro le te določimo konstanto ϵ_0 in potenco ν . To naredimo tako, da v log-log skali poiščemo tangento na funkcijo koeficienta sproščanja energije $\epsilon_H(T)$ pri izbrani temperaturi. Naklon tangente nam določa potenco ν in presečišče tangente in abscise osi konstanto ϵ_0 .

5 Proizvodnja energije

V zvezdah na glavni veji se vodik (H) pretvarja v helij (He). Gorenje vodika poteka po dveh ciklih:

1. pp-cikel: V tem ciklu He nastane z zlivanjem vodikovih jeder in njihovih izotopov. Pri reakciji lahko sodelujejo tudi litij, berilij in bor (pp2, pp3). Koeficient sproščanje energije na enoto časa in mase opišemo z naslednjo enačbo [1, stran 163]:

$$\epsilon_{pp} = 2.3810^6 \psi f_{11} g_{11} \rho X_1^2 T_6^{-2/3} e^{-33.80/T_6^{1/3}} \quad (41)$$

$$g_{11} = (1 + 0.0123T_6^{1/3} + 0.0109T_6^{2/3} + 0.0009T_6) \quad (42)$$

ϵ_{pp} in ρ sta v cgs enotah. f_{11} je faktor senčenja pri reakciji. S ψ popravimo dodatek energiji pri vejah pp2 in pp3. X_1 je delež vodika. T_6 je temperatura v $10^6 K$.

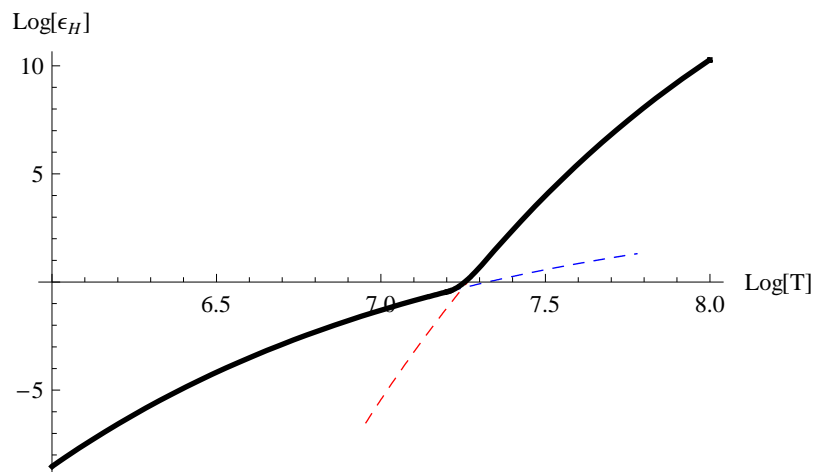
2. CNO-cikel: V tem ciklu se vodik pretvarja v helij z ogljikom (C), dušikom (N) in kisikom (O) kot katalizatorji. Koeficient sproščanje energije na enoto mase in časa je v tem primeru zapišemo v obliki [1, stran 165]:

$$\epsilon_{CNO} = 8.6710^2 7 g_{14,1} \rho X_{CNO} X_1 T_6^{-2/3} e^{-152.28/T_6^{1/3}} \quad (43)$$

$$g_{14,1} = (1 + 0.0927T_6^{1/3} - 0.00778T_6^{2/3} - 0.000149T_6) \quad (44)$$

X_{CNO} je vsota masnih deležev ogljika, dušika in kisika. Tako kot prej sta ϵ_{CNO} in ρ v cgs enotah.

Funkcija $\epsilon_H(T)$ je prikazana na spodnji sliki.



Slika 2: Proizvodnja energije ϵ [$g^{-1}s^{-1}$] v odvisnosti od temperature T [K], pri $\rho = 1gcm^{-3}$, $X_1 = 1$ in $X_{CNO} = 0.01$. CNO prispevek predstavlja rdeča barva in p-p modra.

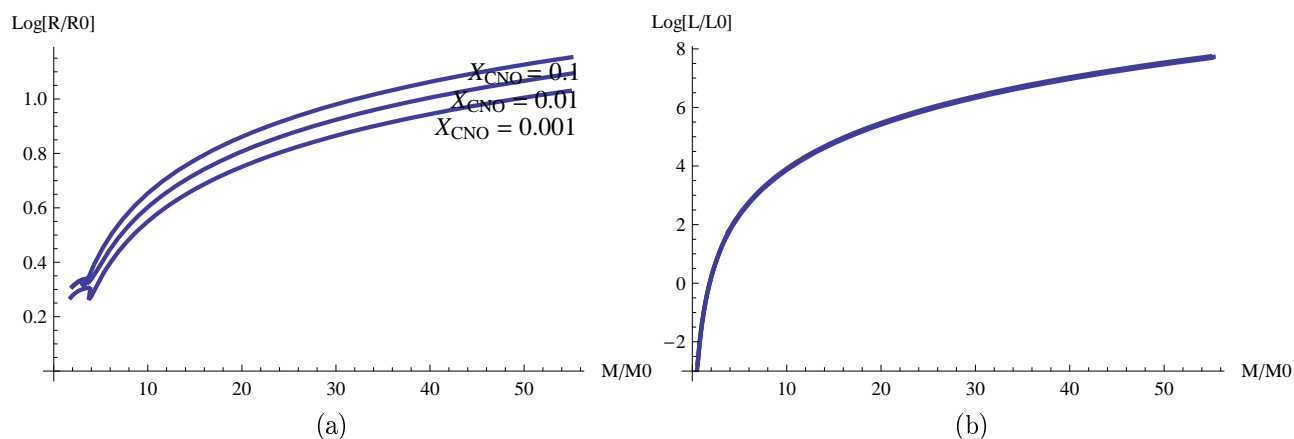
6 Meje veljavnosti modela

Ko imamo sklopljeno jedro in ovojnico lahko začnemo operirati z dimenzijskimi spremenljivkami in tako preverimo model. Za normalizacijo količin bomo uporabili vrednosti za Sonce, ki so prikazane v spodnji tabeli.

Oznaka	Vrednost
M_0	$2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
R_0	$1.392 \cdot 10^9 \text{ m}$
L_0	$3.846 \cdot 10^{26} \text{ W}$
ρ_{0c}	$1.622 \cdot 10^5 \text{ kg/m}^3$
T_{0c}	$1.571 \cdot 10^7 \text{ K}$
P_{0c}	$2.477 \cdot 10^{11} \text{ bar}$

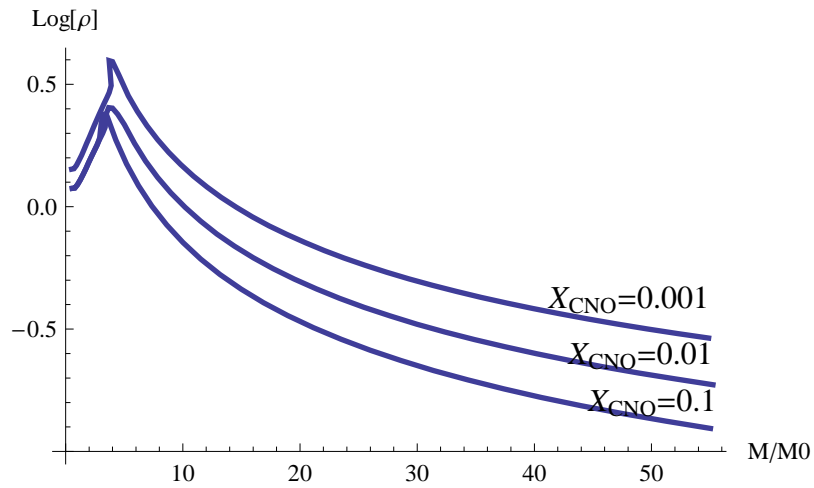
Tabela 1: Vrednosti za sonce [2].

Najprej si pogledjmo kako se spreminja radij in izsev zvezde v odvisnosti od njene mase.



Slika 3: Odvisnot radija R (a) in izseva L (b) od mas zvezde za različne vrednosti X_{CNO} .

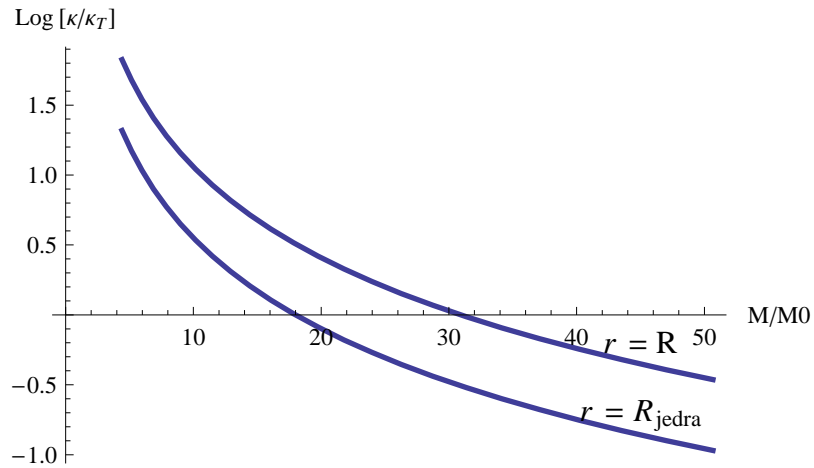
Vidimo, da ima funkcija pri majhnih masah zlom, kar nakazuje neveljavnost modela za manjše mase. Opazimo tudi, da izsev ni odvisen od deleža X_{CNO} . Pogledjmo si še kako, je s centralno gostoto.



Slika 4: Spreminjanje centralne gostote $\rho_c[\text{gcm}^{-3}]$ v odvisnosti od mase M za različne vrednosti X_{CNO} .

Pričakujemo, da se centralna gostota manjša z večanjem mase, vendar opazimo, da pri manjših masah to ne drži. Gostota začne padati na prehodu, kjer produkcija energije s CNO ciklom preide v p-p cikel. Veljavnost modela je torej samo v režimu, kjer proizvodnja energije poteka po CNO ciklu. Ta režim prevladuje od 5 – 6 mas sonca naprej. S tem smo dobili spodnjo mejo za katero je model primeren.

Da bi dobili zgornjo mejo, si pogledjmo kako se spreminja absorpcijski koeficient z večanjem mase zvezde.



Slika 5: Spreminjanje kvocienta koeficientov za prosto-prosto absorpcijo κ in absorpcijo zaradi Thompsonovega sipanja $\kappa_T = 0.04 \text{ m}^2\text{kg}^{-1}$ [1, stran 137] na površju zvezde in robu jedra v odvisnosti od mase zvezde.

Opazimo, da absorpcija pada z večanjem mase zvezde. Ko absorpcijski koeficient pade pod vrednost koeficienta absorpcije zaradi Thompsonovega sipanja, postane model neveljaven. To se zgodi okoli 19 mas sonca na robu jedra in okoli 30 mas sonca tik pod površjem.

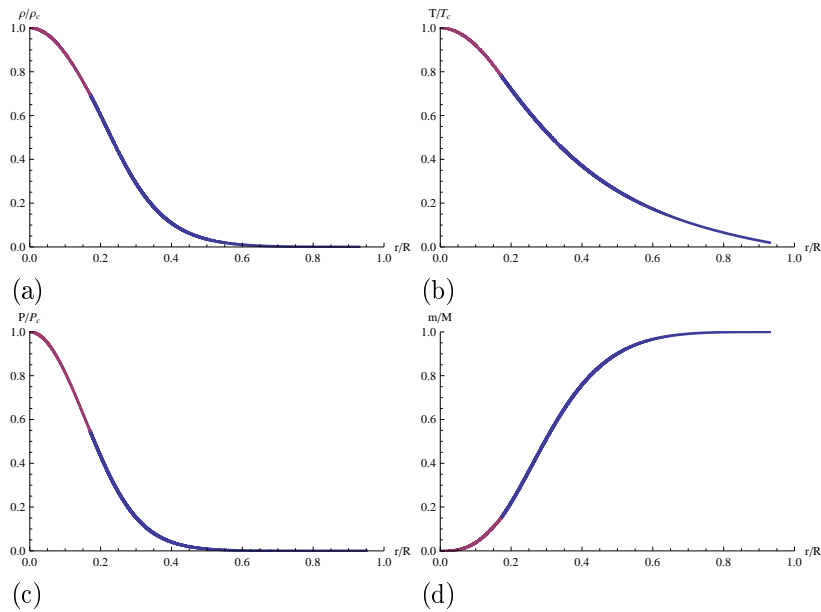
7 Rezultati

Poglejmo si še sedaj profile temperature, tlaka in gostote preko celotne zvezde s politropnim modelom $n = 3/2$ in absorpcijskim modelom $a = 1$ in $b = 3.5$. Najprej si izberemo centralno temperaturo $T_c = 25 \cdot 10^6 K$ in tako določimo eksponent ν in konstanto ϵ_0 . Nato izračunamo maso M , radij R ter izsev L . S temi vrednostmi pretvorimo brezdimenzijske spremenljivke iz enačb (19) nazaj v dimenzijske. Za politropni model pa moramo izračunati še centralno gostoto ρ_c , centralni tlak P_c . Dobljene vrednosti so podane v spodnji tabeli.

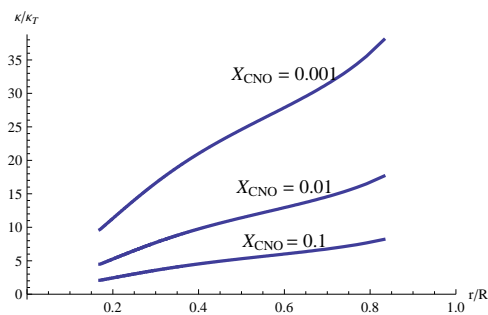
X_{CNO}	M [kg]	R [m]	L [W]	ρ_c [kgm ⁻³]	P_c [bar]	T_c [K]
0.1	$2.636 \cdot 10^{31}$	$7.599 \cdot 10^9$	$1.67 \cdot 10^{31}$	528	$1.099 \cdot 10^{14}$	$25 \cdot 10^6$
0.01	$1.796 \cdot 10^{31}$	$5.177 \cdot 10^9$	$1.713 \cdot 10^{30}$	1138	$2.367 \cdot 10^{14}$	$25 \cdot 10^6$
0.001	$1.224 \cdot 10^{31}$	$3.527 \cdot 10^9$	$1.2.515 \cdot 10^{29}$	2454	$5.100 \cdot 10^{14}$	$25 \cdot 10^6$

Tabela 2: Vrednosti, ki jih dobimo z modelom.

Ko imamo numerične vrednosti potrebne za pretvorbo brezdimenzijskih količin v dimenzijske, lahko združimo rešitve za jedro in ovojnico. Spodaj so prikazani normalizirani profili za gostoto, temperaturo tlak, masno porazdelitev in absorpcijski koeficient.



Slika 6: Radialni profil gostote ρ (a), temperature T (b), tlaka P (c) in mase m . Rdeča barva predstavlja jedro modra ovojnico



Slika 7: Radialni profil absorpcijskega koeficienta v sevalni ovojnici za različne vrednosti X_{CNO} . $\kappa_t = 0.04 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$.

Literatura

- [1] R. Kippenhahn & A. Weigert, *Stellar Structure and Evolution*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1990.
- [2] <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html>.